Försättsblad

Denna inlaga till TUN (tekniska utbildningsnämnden) är föranledd av en skrivelse från forskningsansvariga professorer i fysik angående behoven av analytisk mekanik som det var nödvändigt att bemöta.

Inlagan har lagts in här p.g.a. ett blogginlägg från tv-profil som hänvisar till inlagan. Den som läser inlagan får därmed möjlighet att själv analysera om texten är vetenskaplig eller ej. En avsikt är att tydliggöra att teknisk fysik är en mycket seriös utbildning som starkt värnar ett vetenskapligt förhållningssätt, där ingenjörsrelevanta aspekter dock inte får försummas. Studenter, blivande studenter och framtida arbetsgivare kan känna sig trygga i att teknisk fysik är en garanti för hög kvalité med stor relevans!

2017-11-08

Olov Ågren, Professor i teknisk fysik

Programansvarig för civilingenjörsprogrammet i teknisk fysik vid Uppsala universitet

Analytisk mekanik: Mer generellt än Newton-Maxwells formalism? *Olov Ågren, 2015-11-16*

Bankurvor: Låt oss först illustrera att analytisk mekanik för konservativa system endast innebär en trivial omplacering av massan i ekvationerna: Rörelseekvationen $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla U(\mathbf{x})$, [som ger $\varepsilon = m\frac{\mathrm{v}^2}{2} + U(\mathbf{x})$ = konst] kan överföras till system av första ordningens ODE:

Runge-Kutta:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{m}\nabla U$$

Hamiltons ekv: $\varepsilon = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{x})$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}$$ (Lagrange: $\mathbf{p} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}$)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla U$$ (innebär endast omflyttning av *m* !)

Stelkropp: På motsvarande sätt innebär Hamilton-Lagranges ekvationer för stelkropp bara att man flyttar om tröghetsmomenten I_{ij} i ekvationerna och detta innehåller inget principiellt nytt. De grundläggande relationerna är Eulers ekvationer för stel kropp, där ett val att använda Lagrangeformulering dock inte ger någon ny fysik!

Det är mer fruktbart att utgå från Newtons ekvationer om man vill få med friktion eller magnetkrafter. Man leds då naturligt till att ersätta energianalys med analys av tillförd energi per tidsenhet (maskiningenjörer gör detta!). Genom att utgå från effekt (snarare än energi) ses att för roterande motorer relateras effekt, vridmoment och varvtal av

$$P = \omega\tau$$ (låg växel ger högt vridmoment, friktion kan tas med ….)

Ibland anförs att Lagrangebeskrivning skulle motsvara minimering (Hamiltons princip) av integralen

$$L = \int_{t_1}^{t_2} [m\frac{\mathrm{v}^2}{2} - U(\mathbf{x})]\, dt$$

I så fall skulle man kunna få fram enkla approximationer med testfunktioner och variationskalkyl, men det används i praktiken aldrig!! Orsaken är att minimering förutsätter att ändpunktsvärdena för $\mathbf{x}(t_2)$ är fixa!!

Ett speciellt område där minimering är fruktbart är bestämning av geodeter inom differentialgeometri (detta och allmän relativitetsteori ligger dock utanför teknisk fysiks kärnområde). Om man utvidgar minimering till fler rumsvariabler finns också en rad tillämpningar, men olyckligtvis är det inte åt det hållet kursen i analytisk mekanik blickar. I sådana situationer betraktas fältekvationer i rummet (till skillnad från banekvationer) och man kan ofta omformulera fältekvationerna till en minimering (exempelvis motsvarar $\nabla^2\phi = 0$ av en minimering av fältenergin

$\int |\nabla\phi|^2 \, d^3x$, och liknande minimeringar för fältekvationer används inom kvantmekanik, elasticitetsteori, stabilitetsanalys, egenvärdesbestämningar m.h.a. Rayleigh-Ritz m.m.).

Ett annat problem med Lagrangebeskrivningen är hur krafter som inte uträttar arbete skall tas med. För punktladdning i stationärt elektromagnetiskt fält med potentialerna $(\phi, \mathbf{A})$ är energin $\varepsilon = m\frac{\mathrm{v}^2}{2} + q\phi(\mathbf{x})$ konstant. Derivering ger $0 = \mathbf{v}\cdot[m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + q\nabla\phi\,]$. Notera att detta <u>inte</u> innebär att termerna inom hakparentesen tar ut varandra om det finns krafter (typiskt avses magnetkrafter) som inte uträttar arbete. Istället har vi $0 = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + q\nabla\phi + \mathbf{v}\times\boldsymbol{\alpha}$, som med $\boldsymbol{\alpha} = -q\mathbf{B}$ ger

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\cdot(-\nabla\phi + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$$ (Lorentzkraften, där magnetkraften inte uträttar arbete !)

Exemplet illustrerar varför s.k. *virtuella förflyttningar*, som är grunden för att konstruera Lagrangebeskrivningar, leder till tvetydigheter och inte behöver leda till korrekt rörelseekvation! Basen för mekanik är sålunda inte Lagrange-Hamiltons ekvationer utan Newton-Maxwells rörelselagar, som kan generaliseras till ekvationer för partikelsystem (i synnerhet rörelseekvationer för stelkropp eller teorier för materials elasticitet och fluiders rörelse)!

Adiabatiska invarianter: Dessa är användbara för att på förhand få kunskap om hur rörelse begränsas av magnetfält, symmetrier m.m. De används också för att bestämma sannolikhetstätheter inom statistisk mekanik. Den enklaste utgångspunkten är Lorentzkraften som kan skrivas

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v} + q\mathbf{A}) = \nabla\,(-q\phi + q\mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$$

För godtyckliga slutna kurvor innebär detta

$$\oint_C \frac{d(m\mathbf{v} + q\mathbf{A})}{dt}\cdot d\mathbf{l} = 0$$ (Gauge-invariant)

S.k. adiabatiska invarianter (Bohm, Alfven, Teller, Northrop…) kan härledas från ovanstående:

$$\mu = \frac{m\mathrm{v}_\perp^2/2}{B} \approx konst$$ (Hannes Alfven, Uppsala 1950)

$$J_\parallel = \oint_{C_\parallel} \mathrm{v}_\parallel\, ds \approx konst \;??$$ (Endast om partikelrörelsen periodisk!! Ej radiell inneslutning!)

Partikelinneslutning i magnetfält påverkas av vinkelräta drifter:

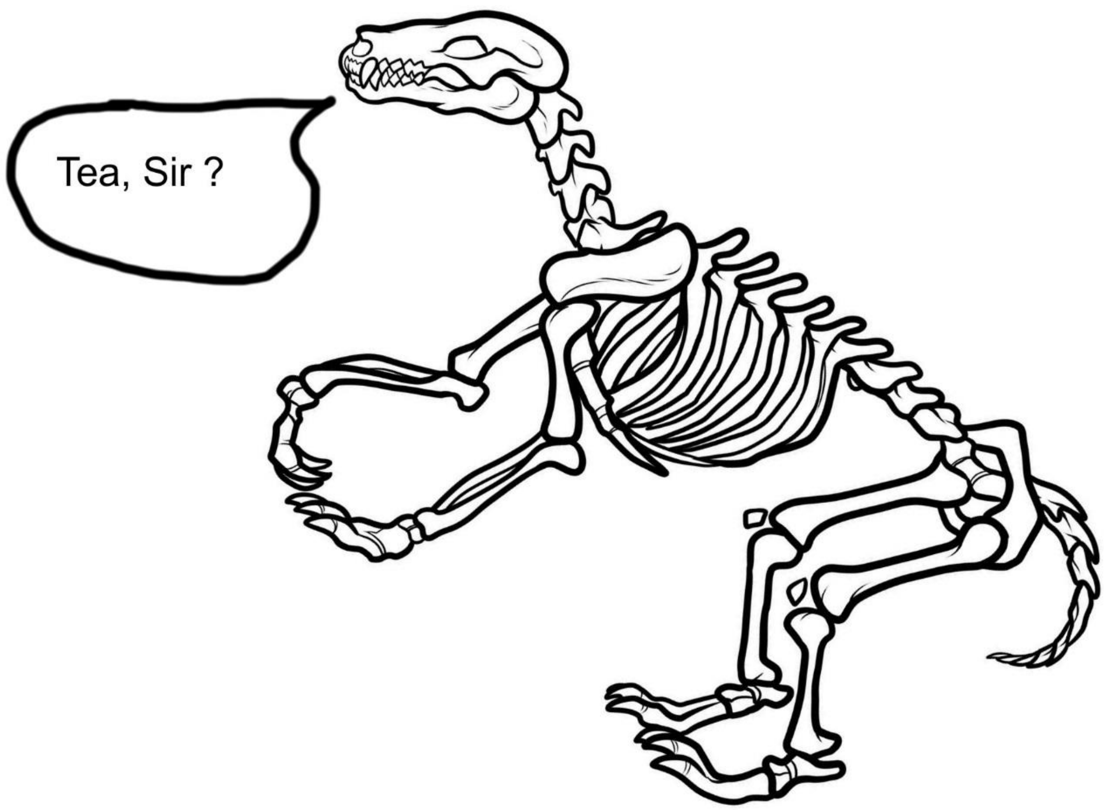
$$\mathbf{v}_\perp = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2} + \frac{1}{q}(\mu + \frac{m\mathrm{v}_\parallel^2}{B})\frac{\mathbf{B}\times\nabla B}{B^2}$$

Framtida utvecklingsområden för mekanik:

Utbildningen bör positioneras mot områden som kan förväntas få stor betydelse. Exempelvis menar jag att kaosteori antagligen inte blir ett lika viktigt för ingenjörer som områden där mekanik och inbyggda system integreras.

Robotmekanik

I framtiden kan små mekaniska robotar m.m. bli ett stort område för ingenjörer. Av skäl som anges ovan (friktion, och därtill styrning och reglering) är det mer praktiskt att basera robotmekanik på Newtons ekvationer med givna approximationer för stelkropp m.m. Att ställa upp en Lagrangefunktion för hela systemet är opraktiskt; det är mer skalbart att betrakta vridmoment och krafter (med tvångsvillkor, friktion, elasticitet och reglerinstrument) för de olika delarna i systemet. Det är också den metodik som används av utvecklare inom området, där man lägger till givare, intelligens och allt mer sofistikerad utrustning från optik och elektronik för att åstadkomma adaptiva system, styrning och kommunikation. Med de allt mer flexibla byggsätten för elektronik kan man förutse en enorm tillväxt av ingenjörsrelevanta arbetstillfällen, där *multikompetens inom mekanik och inbyggda system* kommer att vara nyckelkompetenser.



Är analytisk mekanik grund för statistisk mekanik eller kvantmekanik?

Statistisk mekanik:

Utgångspunkten är att utvidga rummet till ett 6-dimensionellt fasrum och införa en sannolikhetstäthet $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$, som i stationära fall uppfyller

$$\frac{df(\mathbf{x},\mathbf{v})}{dt}=0 \quad \text{(Boltzmann-ekvationen)}$$

Eftersom rörelsekonstanter $I_k(\mathbf{x},\mathbf{v})$ definieras av $\frac{dI_k}{dt}=0$ inses att jämviktslösningen är en godtycklig funktion $f=f(I_1,I_2,...I_{2n-1})$ av systemets oberoende rörelsekonstanter. Om ”kraften” i fasrummet är ”divergensfri” (eller ”area-preserving”) kan man också härleda Liouvilles teorem för fasrumsvolymens konstans (analytisk mekanik behövs inte för detta!).

Partikeltäthet, ström/flöden m.m. definieras av integraler över hastigheter (inte kanoniska momenta!!):

$$n(\mathbf{x}) \equiv \int d^3\mathrm{v}\ f(\mathbf{x},\mathbf{v}) \neq \int d^3p\ f(\mathbf{x},\mathbf{v})$$

Genom att ta olika moment av Boltzmanns ekvation får man makroskopiska ekvationer för massa, rörelsemängd, energi m.m.

David Enskog visade i Uppsala 1917 genom att utgå från $f(\mathbf{x},\mathbf{v},t) \sim n(\lambda\mathbf{x})e^{-\mathrm{v}^2/k_BT(\lambda\mathbf{x})}+\lambda f_1$ (kollisioner driver snabbt fördelningen mot en lokal Maxwell-Boltzmannfördelning) att Ficks lag $\mathbf{j}=-D\nabla n$ (och andra gradientdrivna flöden) kunde härledas från Boltzmanns ekvation, om den fria medelväglängden mellan kollisioner är kort jämfört med de makroskopiska gradientlängderna. Kvalitativt bestäms diffusionskoefficient av hopp- och steglängd i kollisionsprocesser, $D\sim\frac{\Delta t}{|\Delta x|^2}$

Entropi och information hos signaler: Boltzmanns H-teorem visar att kollisioner driver sannolikhetstätheten mot en Gauss-fördelning, vilket är den fördelning som har maximal entropi (oordning). Det finns en intressant informationsteori (Shannon, Gabor) som baseras på en motsvarande entropimaximering för signaler. Signalen med maximal entropi motsvarar vågfunktion med minimal osäkerhet mellan läge och vågtal.

Kvantmekanik är enormt viktig för statistisk mekanik, och leder till Fermistatistik för populationen av elektroner. Detta ger en rad intressanta kvantfenomen på makroskopisk nivå, och behövs exempelvis för att bestämma energigap till ledningsband, ledningsförmåga i metaller m.m.

Kvantmekanik:

Att Hamiltons ekvationer skulle vara en bas för att se utvidgningen till kvantmekanik har antagligen sprungit fram från en feltolkad språklig association mellan *Hamilton*-operatorn (ett bättre namn vore kanske istället ”energioperatorn”) och *Hamilton*-funktionen i klassisk mekanik. Man kan exempelvis inte utgå från att kvantmekaniska kommutatorrelationer enkelt ska kunna relateras till klassiska Poissonklamrar genom $[f,g]_{\mathbf{x},\mathbf{p}} = ih\{f,g\}_{\mathbf{x},\mathbf{p}}$ (även om det i vissa fall kan vara en vägledning).

Centrala insikter i kvantmekanik är att tillstånd beskrivs av vågpaket $\psi(t) = \int dx\, \tilde{\psi}(k,t) e^{ikx}$, och för alla vågpaket finns en osäkerhetsrelation mellan läge och vågtal:

$$\Delta x \cdot \Delta k \;\geq\; \frac{1}{2}$$

Man kan i en vågpaketsrepresentation associera vågtalet med en operator $k_{op} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. Eftersom interferensexperiment visar att en partikel har en våglängd (de Broglie-våglängden) med motsvarande vågtal *k* som relateras till partikelns rörelsemängd genom $p = \frac{h}{2\pi}k$ (som motsvarar operatorn $p_{op} = -i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}$ på ett vågpaket), leder detta till Heisenbergs osäkerhetsrelation:

$$\Delta x \cdot \Delta p \;\geq\; \frac{h}{4\pi}$$

Intressant är att vågfunktionen med minimal osäkerhet har en täthetsfunktion som är en Gaussfördelning (maximal entropi). Mer generellt i den kvantmekaniska operatormekaniken finns en osäkerhet mellan alla kvantiteter vars operatorer inte kommuterar. Återigen ska kommutatorrelationerna inte grundas på en trivial relation till Poissonklamrar i klassisk mekanik. Hur ska exempelvis den kanoniska rörelsemängden **p** tolkas med magnetfält? (I klassisk mekanik gäller $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}$). I fall utan magnetfält introducerade Schrödinger som bekant ”energi-operatorn” $H_{op} = \frac{1}{2m}p_{op}^2 + U(\mathbf{x})$, dvs $H_{op} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{x})$.

Tanken att analytisk mekanik skulle vara en bas för kvantmekanik är på sin höjd en metafysisk spekulation, som därtill visar sig vara tvivelaktig vid en noggrannare kontroll. Hamiltonformalism för klassiska system är inte heller ett ramverk för klassisk teori (exempelvis uttrycks de elektromagnetiska ekvationerna bekvämast med den vanliga formen för Maxwells ekvationer; eller möjligen som vågekvationer som enkelt kan härledas från dessa). Däremot är kommutatoralgebra onekligen ett betydelsefullt område för kvantmekanik.

Ett område där det över huvud taget inte går att se någon övergång från kvantmekanik till klassisk fysik är spridningsteori. I klassisk fysik utgår beräkningar av tvärsnitt från väldefinierade banor, medan kvantmekaniska beräkningar baseras på hur en inkommande våg sprids. P.g.a. osäkerhetsrelationen är det inte meningsfullt att införa väldefinierade banor i kvantmekanik. Kvantmekanik och klassisk fysik ger betydande skillnader t.o.m. för elastisk spridning, även om de två teorierna råkar ge samma resultat för det totala spridningstvärsnittet för Rutherfordspridning.

Slutsats: En rad intressanta kopplingar finns mellan kvantmekanik, statistisk fysik, fasta tillståndets fysik, informationsteori m.m. som är fruktbara för teknisk fysik.

Däremot är analytisk mekanik vare sig basen för mer generella teorier (kvantmekanik, statistisk fysik), och ger inte heller en mer generell beskrivning av klassisk fysik.

UPPSALA
UNIVERSITET

Institutionen för fysik och
astronomi

*Department of physics and
astronomy*

Box 516
SE-751 20 Uppsala

Besöksadress/Visiting address:
Ångströmlaboratoriet
Lägerhyddsvägen 1

www.physics.uu.se

2015-10-05

Angående förslaget att ersätta Mekanik III med Teknisk Strömningslära

Kursen Mekanik III som ingår i teknisk fysik-programmet ger studenterna grundkunskaper i mekanik och speciell relativitetsteori som en mängd andra kurser bygger på. Den innehåller moment som stel kropps allmänna rörelse, Hamiltons princip, Lagranges och Hamiltons ekvationer, centralrörelse, kopplade svängningar och speciell relativitetsteori. För mer detaljer se kursplanen.

Vi, de forskarutbildningsansvariga professorerna i fysik och astronomi har svårt att se att studenterna utan dessa grundkunskaper kan uppnå ett tillräckligt djup inom fysiken. För oss är det en självklarhet att man behöver förstå Hamiltons princip och Hamilton/Lagrangemekanik, annars kan man inte gärna förstå statistisk fysik och kvantmekanik, och inte heller kvantfältteori, strängteori, eller formuleringen av fundamentala fysikaliska teorier som standardmodellen för partikelfysik och allmän relativitetsteori.

Lärare från institutionen för fysik och astronomi har samverkat med företrädare för industrin, och noterat att tillräckliga kunskaper i mekanik är något som ofta framhålls som centralt. Det handlar inte bara om den direkta användningen utan även sättet att tänka, att ta fram relevanta frihetsgrader, formulera ett problem och lösa det ibland i en kombination av teoretiskt och experimentellt arbete. Mekanik III är därför viktig för studenternas anställningsbarhet inom industrin.

Studenter från Teknisk Fysik är duktiga, och tidigare har många därifrån framgångsrikt genomfört forskarutbildning inom fysik och astronomi. Detta har gradvis minskat och knappt skett de senaste åren, då studenterna från Teknisk Fysik helt enkelt har för lite kunskap i fysik från sin grundutbildning för att vara nationellt och internationellt konkurrenskraftiga. Det har nu föreslagits att Teknisk Strömningslära ska ersätta Mekanik III. Teknisk Strömningslära kan vara en intressant kurs i vissa avseenden, men om den inkorporeras i programmet på bekostnad av Mekanik III kommer Teknisk fysik-studenterna som vi ser det bli ännu mindre konkurrenskraftiga för forskarutbildning inom fysik och astronomi.

Vi rekommenderar därför bestämt att Mekanik III behålls inom Teknisk fysik-programmet, och i händelse att Teknisk Strömningslära bedöms som tillräckligt viktig för studenterna, inkorporeras i programmet på annat sätt. Vi skulle också gärna se ytterligare fysik-kurser inom programmet för att på nytt öppna möjligheterna för Teknisk fysik-studenter till forskarutbildning inom fysik och astronomi.

Uppsala 2015-10-05

N. Piskunov

Maxim Zabzine

Göran Johansson